Шамарина Вера Валентиновна,
учитель математики
МБОУ «Цнинская СОШ № 1»

Методическая разработка урока геометрии в 11а классе.

Урок состоялся в рамках единого методического дня. Тема дня: «Эффективность урока – стимул к успеху учителя и ученика».

Профиль класса – физико-математический.

Тема урока: «Метод вспомогательной окружности при решении задач».

Урок рассчитан на один учебный час (40 мин.).

Тип урока: урок повторения (один из системы уроков повторения планиметрии в рамках подготовки к ЕГЭ).

Цели урока:

- Повторить материал курса планиметрии, напоминая теоретические факты и опорные задачи, связанные с построением описанной окружности;
- Рассмотреть различные конфигурации по объявленной теме и связанные с ними способы решения задач;
- Продолжить работу по развитию геометрического видения и мышления.

Учащиеся должны знать:

- Понятие угла в окружности;
- Свойства углов, связанных с окружностью;
- Теоремы, связанные с углами (теорема об угле между секущими, теорема об угле между пересекающимися хордами, теорема об угле между хордой и касательной);
- Свойства окружности, описанной около треугольника, четырехугольника.

Учащиеся должны уметь:

- Применять перечисленные знания при решении задач, выбирая наиболее рациональный способ рассуждения;
- Видеть конфигурации и выбирать соответствующий способ решения.

План урока.

I. Организационный момент (2 мин).
II. Повторение теоретических знаний (5 мин).
III. Устная фронтальная работа по решению опорных задач (10 мин).
IV. Письменное решение задач ЕГЭ (20 мин).
V. Задание на дом; подведение итогов работы на уроке (3 мин).

Ход урока.

I. Организационный момент.

II. Учащиеся работают устно, сопоставляют разрезанный текст и рисунок. (Приложение 1)
Вспомогательная окружность-одно из наиболее эстетичных дополнительных построений. Скорее всего, это связано с тем, что «увидеть» окружность там, где её нет, уже само по себе нетривиально**.**

III. Учащиеся работают устно по готовым чертежам на доске, отвечая на вопросы учителя. У каждого есть продублированные чертежи задач на листах, на которых они могут делать записи для дальнейшего личного пользования (приложение 2).

IV. Решаются планиметрические задачи ЕГЭ (приложение 3): требуется распознать конфигурации и применить соответствующую опорную задачу. Отвечающий работает у доски, остальные принимают участие в обсуждении хода решения.

1. Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол 30°. Точка E лежит вне прямоугольника, причём $\angle BEC = 120°$.

а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.

2. В треугольнике ABC проведены высоты AK и CM.
На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно.
а) Докажите, что прямые EH и AC параллельны;

3. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD углы ABD и ACD прямые.
а) Докажите, что $AB = CD$.

1. Задание 16 № 507262

Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол 30°. Точка E лежит вне прямоугольника, причём $\angle BEC = 120°$.

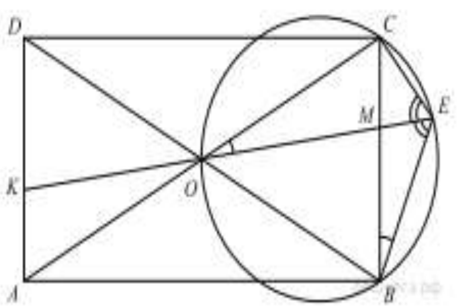
а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.

Решение.

а) По теореме о внешнем угле треугольника $\angle BOC = \angle BAO + \angle ABO = 2 \cdot 30° = 60°$. Поэтому

$$\angle BEC + \angle BOC = 120° + 60° = 180°.$$

Значит, точки B, E, C, O лежат на одной окружности. Вписанные в эту окружность углы CBE и COE опираются на одну и ту же дугу, следовательно, $\angle CBE = \angle COE$.



2. Задание 16 № 514449

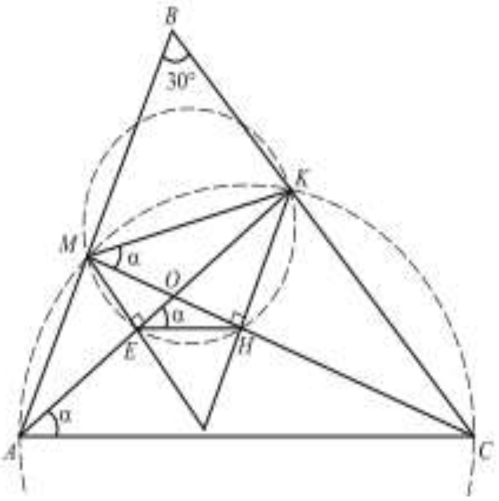
В треугольнике ABC проведены высоты AK и CM. На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно.

а) Докажите, что прямые EH и AC параллельны;

Решение.

Заметим, что отрезок AC виден из точек K и M под углом $90°$, поэтому точки M, K, C и A лежат на одной окружности, диаметром которой является отрезок AC. Аналогично, точки M, K, H, E лежат на окружности, диаметром которой является MK.

Пусть $\angle KAC = \alpha$. Тогда $\angle KAC = \angle KMC = \alpha$, так как они опираются на одну дугу KC в окружности, описанной вокруг четырёхугольника $AMKC$. Кроме того, $\angle KMC = \angle KEH = \alpha$, так как они опираются на одну дугу KH в окружности, описанной вокруг четырёхугольника $MKHE$. Так как $\angle OEH = \angle OAC$, прямые EH и AC параллельны, поскольку это соответственные углы при пересечении EH и AC секущей OA. Это и требовалось доказать.



3. Задание 16

В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD углы ABD и ACD прямые.

а) Докажите, что $AB = CD$.

б) Найдите AD, если $AB = 2$, $BC = 7$.

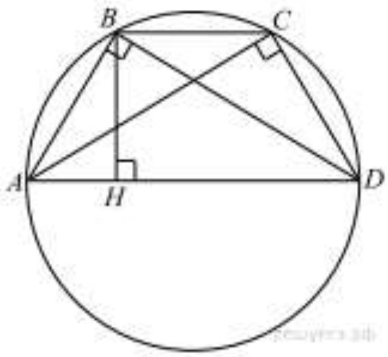
Решение.

а) Углы ABD и ACD прямые, поэтому вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на окружности диаметром AD. Значит $AB = CD$, поскольку $\widehat{ADB} = \widehat{CBD}$.

б) Пусть BH — высота трапеции $ABCD$. Трапеция вписана в окружность, поэтому она равнобедренная. Следовательно, $AD = 2AH + BC$. Тогда

$$AH = AB\cos\widehat{BAD} = AB\cdot\frac{AB}{AD} = \frac{AB^2}{BC+2AH} = \frac{4}{7+2AH},$$

откуда получаем уравнение $2AH^2 + 7AH - 4 = 0$. Его положительным корнем является $AH = 0{,}5$, и тогда $AD = 8$.



Ответ: 8.

V. Подведение итогов работы.

Ситуация I. Если на чертеже есть четырехугольник, у которого суммы противоположных углов равны, то вокруг него можно описать окружность. Наиболее часто описывается окружность около четырехугольника, в котором противолежащие углы прямые.
Ситуация II. Если точки A и D расположены по одну сторону от прямой MN и при этом $\angle MAN = \angle MDN$ (т.е. отрезок MN виден из точек A и D под равными углами), то можно сделать вывод, что точки A, D, M, N лежат на одной окружности.
Ситуация IV. Введение вспомогательной окружности позволяет увеличить количество рассматриваемых отрезков, что дает возможность использовать теоремы об отрезках хорд, секущих и касательных.
Ситуация V. Сопоставление данных (чаще всего числовых) приводит к выводу о возможности использования свойств вписанных и соответствующих им центральных углов некоторой вспомогательной окружности.

Ситуация VI. Выше были рассмотрены задачи, при решении которых применялось свойство окружности: из любой точки окружности диаметр виден под прямым углом. Однако, не менее замечательным, но незамеченным остается тот факт, что из любой точки, лежащей вне окружности, диаметр виден под острым углом; а из любой точки, лежащей внутри окружности, диаметр виден под тупым углом; что также может быть использовано при решении ряда задач.

Задание на дом.

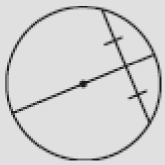
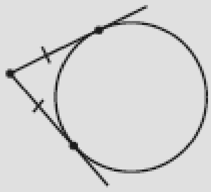
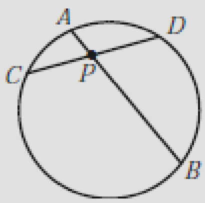
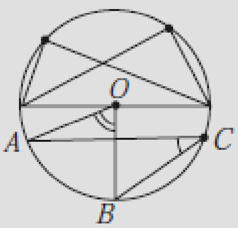
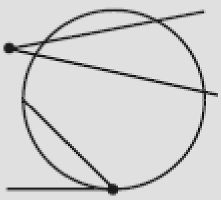
Задание 16 № 504546

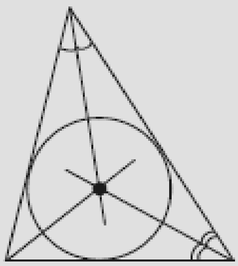
На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опустили высоту CH. Из точки H на катеты опустили перпендикуляры HK и HE.

а) Докажите, что точки A, B, K и E лежат на одной окружности.

б) Найдите радиус этой окружности, если $AB = 12$, $CH = 5$.

Приложение 1.

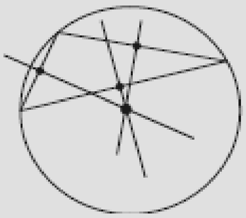
	**1**	Диаметр окружности, проходящий через середину хорды, перпендикулярен ей. Верно и обратное утверждение.
	**2**	Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны.
	**3**	Если AB и CD хорды окружности, пересекающиеся в точке P, то $$AP \cdot BP = CP \cdot DP.$$
	**4**	Угол, вписанный в окружность, измеряется половиной угловой величины дуги, на которую он опирается. *Следствие*: вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны. *Замечательное свойство окружности.* Вписанные углы, опирающиеся на половину окружности (диаметр), прямые.
	**5**	Угол, вершина которого вне (внутри) круга, измеряется полуразностью (полусуммой) дуг, находящихся между его сторонами (и их продолжениями за вершину угла). Угол, образованный касательной и хордой, измеряется половиной дуги, находящейся между его сторонами.



12

Во всякий треугольник можно вписать единственную окружность. Её центром является точка пересечения биссектрис углов треугольника.

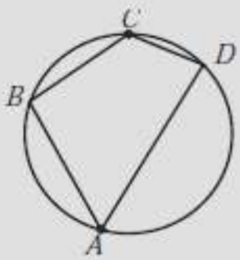
Биссектриса угла есть г.м.т., расположенных внутри угла и одинаково удаленных от его сторон.



13

Около всякого треугольника можно описать единственную окружность. Её центром является точка пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника.

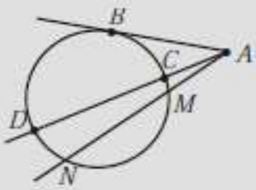
Серединный перпендикуляр к отрезку есть г.м.т., равноудаленных от концов отрезка.



17

Для того чтобы около четырехугольника можно было **описать** окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма его противолежащих углов была равна 180°.

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°.$$



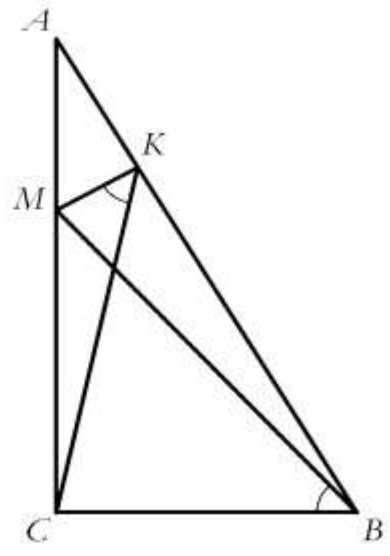
24

Из точки A, взятой вне окружности, проведены к ней касательная AB и две секущие, пересекающие окружность в точках C и D, M и N соответственно. Тогда $AB^2 = AC \cdot AD$.

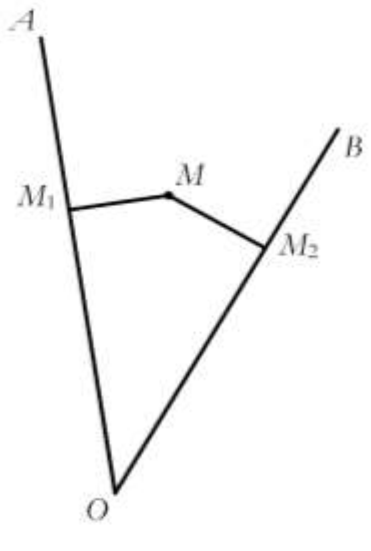
Следствие: $AC \cdot AD = AM \cdot AN$.

Приложение 2.

Задача 1. Из произвольной точки M катета AC прямоугольного треугольника ABC опущен перпендикуляр MK на гипотенузу AB. Докажите, что $\angle MKC = \angle MBC$.



Задача 2. Из точки M, которая принадлежит углу AOB, но не принадлежит его сторонам, опущены перпендикуляры MM_1 и MM_2 на прямые OA и OB. Докажите, что $M_1M_2 \le OM$.



Задача 4. Биссектрисы BK и CM треугольника ABC пересекаются в точке O, $\angle A = 60°$. Докажите, что $OK = OM$.